Numerik für Differenzialgleichungen (Praktikum)

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. S. Hertzog

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/ndgln` .

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (2 Punkte) Die BDF-Verfahren *(Backward Differentiation Formulas)* sind Mehrschrittverfahren, welche für $m \geq 1$ durch

$$\sum_{\ell=0}^{m} \hat{\alpha}_\ell y_{k+\ell} = \tau f(t_{k+m}, y_{k+m})$$

gegeben sind, mit den Koeffizienten $\hat{\alpha}_m = \sum_{j=1}^m 1/j$ und

$$\hat{\alpha}_\ell = (-1)^{m-\ell} \sum_{j=m-\ell}^{m} \frac{1}{j} \binom{j}{m-\ell},$$

$\ell = 0, 1, \dots, m-1$. Verwenden Sie die BDF-Verfahren mit $m = 1, 2, \dots, 7$ zur numerischen Approximation des Anfangswertproblems $y' = f(t, y)$ in $(0, T]$, $y(0) = y_0$, mit $f(t, y) = -2y + 5\cos(t)$, $y_0 = 1$ und $T = 1$, dessen exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$. Stellen Sie die Approximationen graphisch dar.

Aufgabe 5.2 (2 Punkte)
(i) Implementieren Sie den adaptiven Algorithmus zur Schrittweitensteuerung.
(ii) Testen Sie den Algorithmus mit dem impliziten Euler-Verfahren für die Anfangswertprobleme

$$y'(t) = -(y(t) - 100\cos(t)), \quad t \in (0, 1], \quad y(0) = 0,$$

und

$$y''(t) = 20\big(1 - y(t)^2\big)y'(t) - y(t), \quad t \in [0, 100], \quad y(0) = 1/10, \quad y'(0) = 0.$$

Verwenden Sie dabei unterschiedliche Parameter $\delta > 0$ für die Bedingung $|y_{k+1} - y_k| \leq \delta$ und stellen Sie die variablen Schrittweiten graphisch dar. Vergleichen Sie in beiden Beispielen den Aufwand des adaptiven Verfahrens mit den Approximationen auf einem uniformen Gitter. Vergleichen Sie anhand des ersten Beispiels die Genauigkeit der Verfahren. (Die exakte Lösung des ersten Anfangswertproblems ist gegeben durch $y(t) = 50(\sin(t) + \cos(t) - e^{-t})$.)

Abgabe: Per Email an den Tutor bis spätestens Freitag, den 14. Juli 2017.